

# 2018 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

## （数学类）

### 一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求定积分  $\int_{-1}^1 \frac{(x - \cos x)^2 \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$ .

2. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$  确定的隐函数，求  $z''_{xy}(0, 0)$ .

3. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  在点  $(1, -1, 1)$  处的单位切向量。

4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [e^{(x-t)^2} - 1] \sin t dt}{x^4}$ 。

5. 求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{n} x^n$  的收敛域并求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2 + (-1)^n]^n}{n 6^n}$  的和。

二、（满分 20）已知曲线  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  的线密度  $\rho = (x + y)^2$ ，求  $L$  的质量。

三、（满分 20 分）设  $S(a)$  为物体  $x^2 + y^2 \leq z$  被平面  $2x - 2a(y - 3) + z - 13 = 0$  所截的截面面积，求  $S(a)$  的表达式及其最小值。

四、（满分 20 分）设  $\alpha \in \mathbb{R}$ ，确定  $\alpha$  的范围使  $f(x) = x^\alpha \sin x$  在  $(0, +\infty)$  一致连续。

五、（满分 20 分）已知  $a_n > 0$ ,  $a_1 < 1$ ,  $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

（1）证明： $\{a_n\}$  收敛； （2）求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 。