19 经管类参考答案

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$.

解：$\ln x \sim x-1$， $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln(1-x)/(x-1)^{-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)^{-1}/(x-1)^{-2}=0$$

2．求积分 $\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

解：$\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x-x\cos^2 x+\cos x(x\cos x+2\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x\mathrm{d}(\cos x-x\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}$$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos x-x\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}$$

所以 $\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\cos x}{\cos x-x\sin x}+c$ 。

3．求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\theta\cos\theta+1-1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

4．求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$的和。

解：记 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n(2n+1)}$，则 $f''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\frac{-2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=-\ln(1+x^2)\,,\ f(x)=-x\ln(1+x^2)+2x-2\arctan x$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}=f(1)=-\ln 2+2-\frac{\pi}{2}$$

5．如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个为半圆周 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值。

解：设半圆面积为x, 则半圆半径为$r=\sqrt{2x/\pi}$，半圆长为$\sqrt{2\pi x}$，

矩形面积为$1-x$, 其宽为$\frac{1-x}{2r}$, 矩形三边长为$2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(1-x)$，

所以其周长为$l=\sqrt{2\pi x}+2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(1-x)\ \underline{\underline{\sqrt{x}=t}}\ \sqrt{2\pi}t+\sqrt{\frac{8}{\pi}}t+\sqrt{\frac{\pi}{2}}(t^{-1}-t)$

$l'=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}(t^{-2}-1)=0$，$\sqrt{\pi/2}t^{-2}=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}$

$x=t^2=\pi/(4+\pi)$，所以$l_{\min}=\sqrt{2\pi+8}$。

二、（满分 20 分） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{有理数}\\ 0, & x\text{无理数}\end{cases}$,讨论 $f(x)$ 间断点，并判断其类型。

解： $f(x)$ 在 $x=k,k$ 整数时连续。因为 $\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)=f(k\pi)=0$

$x\neq k$ 时 记 $\mathrm{d}=\left|\sin\pi x\right|/2$，在 x 的任意领域内总有有理数 x' 与无理数 x''

使 $\left|f(x')-f(x'')\right|\geq d$，即极限不存在，为第二类间断点。

三、**（满分 20 分）** 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 的收敛性。

解：$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n-1}{n^2-1}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}-\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛

而 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+(-1)^n}$ 发散 ， 所以级数条件收敛

四、（满分 20 分） 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+(2y)^{\frac{2}{3}}=1$ 的全长。

解：曲线写成参数方程 $x=\cos^3 t, y=0.5\sin^3 t$，

$x'=-3\cos^2 t\sin t, y=1.5\sin^2 t\cos t$， $\mathrm{d}s=3\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+0.25\sin^2 t}$ 。

因此 $s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t=12\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+0.25\sin^2 t}\mathrm{d}t$

$=6\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-0.75\sin^2 t}\mathrm{d}\sin^2 t=\frac{16}{3}(1-0.75\sin^2 t)^{1.5}\Big|_{\pi/2}^{0}=\frac{16}{3}(1-\frac{1}{8})=\frac{14}{3}$ 。

五、（满分 20 分） 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明：记 $g(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x^2}$， 则 $g(0)=g(1)=0$，由罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,1)$，

使得 $g'(\xi)=0$ ，即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。