2019 参考答案文专类

一计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1$

2．求积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x-x\cos^2 x+\cos x(x\cos x+2\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x\mathrm{d}(\cos x-x\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}$$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos x-x\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}$$

所以 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\cos x}{\cos x-x\sin x}+c$ 。

3．求积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.

解：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\theta\cos\theta+1-1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

4．设 $y=\sin(\mathrm{e}^{\cos x})$，求 $y''(1)$.

解： $y'=\cos(\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{e}^{\cos x}(-\sin x)$，

$$y''=-\sin(\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{e}^{2\cos x}\sin^2 x+\cos(\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{e}^{\cos x}\sin^2 x-\cos(\mathrm{e}^{\cos x})\mathrm{e}^{\cos x}\cos x$$

所以 $y''(1)=-\sin(\mathrm{e}^{\cos 1})\mathrm{e}^{2\cos 1}\sin^2 1+\cos(\mathrm{e}^{\cos 1})\mathrm{e}^{\cos 1}\sin^2 1-\cos(\mathrm{e}^{\cos 1})\mathrm{e}^{\cos 1}\cos 1$

5．如图，将长度为 1 的线段分为 x, y 两段，再将长为 x 的线段弯成半圆周 ACB,将长为 y 的线段折成矩形的三边 AD、BE、DE，求半圆周和矩形围成图形面积最大值。

解：半圆半径 $r=x/\pi$，矩形宽 $(y-2x/\pi)/2=(1-x-2x/\pi)/2$

（显然要求 $1-x-2x/\pi\geq 0$ 即 $x\leq \pi/(2+\pi)$）

其所围面积 $s=\dfrac{x^2}{2\pi}+\dfrac{2x}{\pi}(1-x-2x/\pi)/2=-\dfrac{x^2}{2\pi}+\dfrac{x}{\pi}(1-\dfrac{2x}{\pi})$

$s'=-\dfrac{x}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{4x}{\pi^2}=0$， $x=\dfrac{\pi}{\pi+4}$，所以 $s_{\max}=\dfrac{1}{8+2\pi}$

二、（满分 20 分） 已知 $f(x)=\ln(x^2-2x-3)$,求 $f^{(n)}(x)$.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)![\dfrac{1}{(x-3)^n}+\dfrac{1}{(x+1)^n}]$

三、（满分 20 分） 已知 $x_1=1, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$，

证明：(1) x_n 单调递减，(2) $x_{n+1}>1/2^n$.

证明：(1)易知 $x_n>0$，由中值定理 $e^{x_n}-1=x_n e^{\xi}, \xi\in(0,x_n)$，所以 $x_{n+1}=\xi<x_n$

(2)由定义得 $x_n=e^{x_n-x_{n+1}}-e^{-x_{n+1}}$ 再由台劳公式

$$x_n=1+x_n-x_{n+1}+(x_n-x_{n+1})^2/2+(x_n-x_{n+1})^3 e^{\xi}/6-1+x_{n+1}-x_{n+1}^2/2+x_{n+1}^3 e^{-\eta}/6$$

$$\Rightarrow (x_n-x_{n+1})^2/2+(x_n-x_{n+1})^3 e^{\xi}/6-x_{n+1}^2/2+x_{n+1}^3 e^{-\eta}/6=0$$

$$\Rightarrow (x_n-x_{n+1})^2-x_{n+1}^2<0 \Rightarrow x_{n+1}(x_n-2x_{n+1})<0 \Rightarrow x_n<2x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1}>1/2^n$$

四、（满分 20） 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+(2y)^{\frac{2}{3}}=1$ 的全长。

解：曲线写成参数方程 $x=\cos^3 t, y=0.5\sin^3 t$，

$x'=-3\cos^2 t\sin t, y=1.5\sin^2 t\cos t$， $ds=3\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+0.25\sin^2 t}$ 。

因此 $s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=12\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+0.25\sin^2 t}dt$

$$=6\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-0.75\sin^2 t}d\sin^2 t=\frac{16}{3}(1-0.75\sin^2 t)^{1.5}\Big|_{\pi/2}^{0}=\frac{16}{3}(1-\frac{1}{8})=\frac{14}{3}$$ 。

五、（满分 20 分） 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导， $f(0)=f(1)=$ C，证明：

$\exists\xi\in(0,1)$， $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证明：记 $g(x)=f(x)e^{-x^2}$， 则 $g(0)=g(1)=0$，由罗尔定理得，$\exists\xi\in(0,1)$，

使得 $g'(\xi)=0$ ，即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。