2019 数学类参考答案

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．已知 $f(x)$ 有界可积，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin x^n\mathrm{d}x$.

解：设 $|f(x)|\le M$, $\left|\int_0^1 f(x)\sin x^n\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1\left|f(x)\sin x^n\right|\mathrm{d}x\le M\int_0^1\sin x^n\mathrm{d}x=M/n+1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin x^n\mathrm{d}x$

2．求积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

解：
$$\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x-x\cos^2 x+\cos x(x\cos x+2\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x\mathrm{d}(\cos x-x\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}$$

$$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos x-x\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}$$

所以 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\cos x}{\cos x-x\sin x}+c$。

3．求积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.

解：
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^3\theta)^2}\mathrm{d}\tan^3\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\tan^3\theta}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}(1-\frac{4}{4+\sqrt{2}})=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{18}$$

4．如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个为半圆周 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值。

解：设半圆面积为x, 则半圆半径为$r=\sqrt{2x/\pi}$，半圆长为$\sqrt{2\pi x}$，

矩形面积为$1-x$, 其宽为$\dfrac{1-x}{2r}$, 矩形三边长为$2\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}(1-x)$，

所以其周长为$l=\sqrt{2\pi x}+2\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}(1-x) \underline{\underline{\text{令}\sqrt{x}=t}} \sqrt{2\pi}t+\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}t+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(t^{-1}-t)$

$l'=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}(t^{-2}-1)=0$，$\sqrt{\pi/2}t^{-2}=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}$

$x=t^2=\pi/(4+\pi)$，所以$l_{\min}=\sqrt{2\pi+8}$

5．定义在$[-1,1]$上的函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n+1}}, & \dfrac{1}{2^{n+1}}<x\le\dfrac{1}{2^n}\\ 0, & -1\le x\le 0\end{cases}$，讨论$f(x)$间断点，并判断其类型。

解：f在$\dfrac{1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{1}{2^n}$处是常值函数,连续,

在$x=\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,3,\cdots$处左极限为$\dfrac{1}{2^{n+1}}$, 右极限为$\dfrac{1}{2^n}$, 第一类间断点,

$-1\le x<0$时连续，$x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$连续。

二、（满分 20） 设Ω是以$(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,3,4)$为顶点且体积为 V(>0)的四面体，

求积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：四面体Ω是凸集，它的点均可表示为

$(x,y,z)=\sum_{j=1}^{4}\lambda_j(x_j,y_j,z_j)$，$\lambda_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{4}\lambda_j=1$，从而作变量替换

$$x=\xi(x_1-x_4)+\eta(x_2-x_4)+\zeta(x_3-x_4)+x_4$$

$$y=\xi(y_1-y_4)+\eta(y_2-y_4)+\zeta(y_3-y_4)+y_4$$

$$z=\xi(z_1-z_4)+\eta(z_2-z_4)+\zeta(z_3-z_4)+z_4$$

$\Omega \to \Omega'=\{(\xi,\eta,\zeta)\ |\ \xi\ge 0,\eta\ge 0,\zeta\ge 0,\xi+\eta+\zeta\le 1\}$，所以

$$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}[\xi(x_1-x_4)+\eta(x_2-x_4)+\zeta(x_2-x_4)+x_4]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|\mathrm{d}V$$

而混合积$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|=6V$，$\iiint_{\Omega'}\xi\mathrm{d}V=\int_0^1\xi\mathrm{d}\xi\int_0^{1-\xi}\mathrm{d}\eta\int_0^{1-\xi-\eta}\mathrm{d}\zeta=1/24$

同理$\iiint_{\Omega'}\eta\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega'}\zeta\mathrm{d}V=1/24$，又$\iiint_{\Omega'}\mathrm{d}V=1/6$

所以$\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}V$

三、（满分 20 分） 讨论级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$的收敛性，其中$p>0$.

解：$\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}\right|=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p+(-1)^n}$，$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散。

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{n^{2p}}+O(\frac{1}{n^{3p}})]$，$p>1/2$时收敛，$p\le 1/2$时发散

所以，$p>1$时绝对收敛，$1\ge p>1/2$时条件收敛，$p\le 1/2$时发散。

四、（满分 20 分） 设函数$u(x,y),v(x,y)$在第一象限连续可导且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$，其中u只是$\sqrt{x^2+y^2}$的函数，求u,v。

解：由条件得$u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2}$，u,v满足$xf'(r)/r=v'_y$，$yf'(r)/r=-v'_x$（*）

$\Rightarrow yv'_y+xv'_x=0\Rightarrow v$是零次齐次函数，即$v=g(y/x)$，从而（*）即为

$x^2f'(r)/r=g'(y/x)\Rightarrow rf'(r)$是零次齐次函数$\Rightarrow rf'(r)=c_1\Rightarrow f(r)=c_1\ln r+c_2$

记$t=y/x$则$g'(t)=c_1(1+t^2)^{-1}\Rightarrow g(t)=c_1\arctan t+c_3$

$\Rightarrow u=c_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+c_2$ ，$v=c_1\arctan(y/x)+c_3$

五、（满分 20 分） 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可微，

证明：$$\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})-n\int_0^1 f(x)dx]=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$$

证明：记$x_k=k/n$，当$x\in(x_{k-1},x_k)$ 有 $f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+o(x-x_k)$

$$\Rightarrow n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f'(x_k)/2n+o(n^{-1})]$$

所以$$\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})-n\int_0^1 f(x)dx]=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(x_k)+o(1)]$$

因为$f'(x)$连续 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'(x_k)=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$$。