2019 工科类参考答案

一计算题：（每小题 1 4 分，满分 7 0 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+\tan n^{-1}}{1-\tan n^{-1}})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\tan n^{-1})^n}{(1-\tan n^{-1})^n}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}(1\pm\tan n^{-1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1\pm\tan n^{-1})^{\frac{\pm1}{\tan n^{-1}}(\pm n\tan n^{-1})}=e^{\pm1}$

2．求不定积分 $\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

解: $\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2x-x\cos^2 x+\cos x(x\cos x+2\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\cos x\mathrm{d}(\cos x-x\sin x)}{(\cos x-x\sin x)^2}$

$=\int\frac{2x-x\cos^2 x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos x-x\sin x}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x+\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}$

所以 $\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\cos x}{\cos x-x\sin x}+c$。

3．求定积分 $\int_0^{\pi}\cos(\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^{\pi}\cos(\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\cos^2 t)\sin t\mathrm{d}t=0$

4．如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个为半圆周 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值。

解：设半圆面积为 x, 则半圆半径为 $r=\sqrt{2x/\pi}$，半圆长为 $\sqrt{2\pi x}$，

矩形面积为 $1-x$, 其宽为 $\frac{1-x}{2r}$, 矩形三边长为 $2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(1-x)$，

所以其周长为$l=\sqrt{2\pi x}+2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}+\sqrt{\frac{\pi}{2x}}(1-x)\ \underline{\underline{\sqrt{x}=t}}\sqrt{2\pi}t+\sqrt{\frac{8}{\pi}}t+\sqrt{\frac{\pi}{2}}(t^{-1}-t)$

$l'=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}(t^{-2}-1)=0$，$\sqrt{\pi/2}t^{-2}=\sqrt{2\pi}+\sqrt{8/\pi}-\sqrt{\pi/2}$

$x=t^2=\pi/(4+\pi)$，所以$l_{\min}=\sqrt{2\pi+8}$

5．定义在$[-1,1]$上的函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}}, & \frac{1}{2^{n+1}}<x\le\frac{1}{2^n} \\ 0\ , & -1\le x\le 0\end{cases}$，讨论$f(x)$间断点，并判断其类型。

解：f 在$\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{1}{2^n}$处是常值函数,连续,

在$x=\frac{1}{2^n}, n=1,2,3,\cdots$处左极限为$\frac{1}{2^{n+1}}$,右极限为$\frac{1}{2^n}$,第一类间断点,

$-1\le x<0$时连续，$x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$连续。

二、（满分 20 分） 求积分 $\iint_D (5y^3+x^2+y^2-2x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$D:1\le(x-1)^2+y^2\le 4$ 且 $x^2+y^2\le 1$.

解: D 关于 x 轴对称，记 D 在 x 轴上方的部分为 Ω，那么

$$I=\iint_D (5y^3+x^2+y^2-2x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_\Omega (x^2+y^2-2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

采用极坐标 $x=r\cos\theta+1, y=r\sin\theta$，则 $\Omega=\{1\le r\le -2\cos\theta, 2\pi/3\le\theta\le\pi\}$

所以 $I=2\int_{2\pi/3}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{-2\cos\theta} r^3\,\mathrm{dr}=0.5\int_{2\pi/3}^{\pi}(16\cos^4\theta-1)\mathrm{d}\theta=0.5\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta-1)\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^{\pi/3}(4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta+5\pi/6=7\sqrt{3}/8+5\pi/6$

三、（满分 20 分） 讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的收敛性，其中 $p>0$.

解: $\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}\right|=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p+(-1)^n}$， $p>1$ 时收敛， $p\le 1$ 时发散。

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{+\infty}[\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{n^{2p}}+O(\frac{1}{n^{3p}})]$$，$p>1/2$ 时收敛， $p\le 1/2$ 时发散

所以， $p>1$ 时绝对收敛，$1\ge p>1/2$ 时条件收敛， $p\le 1/2$ 时发散。

四、（满分 20 分） 设由方程 $x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$ (*) 确定函数 $z=z(x,y)$，

1)计算 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

2)如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与（*）交为圆，求此法向量。

解:1）方程两边对 x 得 $1+z_x'=f'(2x+2zz_x')$，所以 $z_x'=\dfrac{2xf'-1}{1-2zf'}$

同样得 $z_y'=\dfrac{2yf'-1}{1-2zf'}$ 所以 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y$

2)考察曲线 $\Gamma: x+y=f(x^2+y^2),\ \mathrm{z}=0$ 绕直线 $L: x=y=z$ 的旋转曲面。

任取旋转曲面上一点 $\mathrm{Q}(x_Q,y_Q,z_Q)$，必定是 Γ 上点 $\mathrm{P}\,(x_P,y_P,0)$ 绕 L 所成圆周上的点。从而 $x_Q+y_Q+z_Q=x_P+y_P$,且 Q、P 到 L 的距离相同，即

$$2(x_Q^2+y_Q^2+z_Q^2-x_Qy_Q-y_Qz_Q-x_Qz_Q)=3x_Q^2+3y_Q^2+3z_Q^2-(x_Q+y_Q+z_Q)^2$$

$$=2(x_P^2+y_P^2-x_Py_P)=3x_Q^2+3y_Q^2-(x_Q+y_Q)^2$$

$\Rightarrow x_Q^2+y_Q^2+z_Q^2=x_P^2+y_P^2$。所以 (x_Q,y_Q,z_Q) 满足 $x_Q+y_Q+z_Q=f(x_Q^2+y_Q^2+z_Q^2)$，

而 Q 点是任意的，所以 $x+y+z=f(x^2+y^2+\mathrm{z}^2)$ 是 Γ 绕 L 的旋转曲面方程。

因此，以 $\vec{n}(1,1,1)$ 为法向量的平面与曲面（*）交线为圆。

五、（满分 20 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}[f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)]=\dfrac{1}{2}(f(1)-f(0))$.

证明：由中值定理 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)=f'(\xi_k)\dfrac{1}{2n}$，$\xi_k\in(\dfrac{2k-1}{2n},\dfrac{k}{n})\subset(\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n})$

f' 连续，从而可积，所以定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$$