

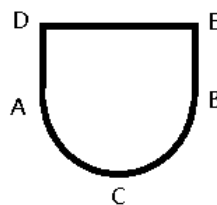
2019 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

经管类

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x)$.
2. 求积分 $\int \frac{2x + \sin 2x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$.
3. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta$.
4. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ 的和。

5. 如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值。



- 二、（满分 20 分）已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 有 理 数} \\ 0, & x \text{ 无 理 数} \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 间断点,

并判断其类型。

- 三、（满分 20 分）讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 的收敛性。

- 四、（满分 20 分）求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + (2y)^{\frac{2}{3}} = 1$ 的全长。

- 五、（满分 20 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = f(1) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (0,1)$,

$$f'(\xi) = 2\xi f(\xi).$$