

2019 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

文专类

一、计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

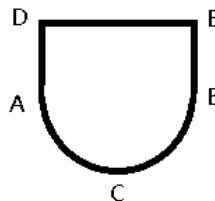
1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1) - \ln x}{x}$.

2. 求积分 $\int \frac{2x + \sin 2x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$.

3. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta$.

4. 设 $y = \sin(e^{\cos x})$, 求 $y''(1)$.

5. 如图, 将长度为 1 的线段分为 x, y 两段, 再将长为 x 的线段弯成半圆周 ACB, 将长为 y 的线段折成矩形的三边 AD、BE、DE, 求半圆周和矩形围成图形面积最大值。



二、（满分 20 分）已知 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、（满分 20 分）已知 $x_1 = 1, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$,

证明: (1) x_n 单调递减, (2) $x_{n+1} > 1/2^n$.

四、（满分 20 分）求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + (2y)^{\frac{2}{3}} = 1$ 的全长。

五、（满分 20 分）已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1), \quad f'(\xi) = 2\xi f(\xi).$$