2019 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

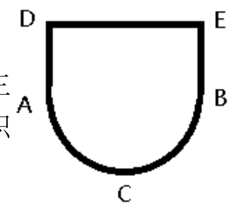
数学类

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．已知 $f(x)$ 有界可积，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin x^n \mathrm{d}x$.

2．求积分 $\int \frac{2x+\sin 2x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x$.

3．求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.



4．如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值。

5．定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \\ 0, & -1 \le x \le 0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 间断点，并判断其类型。

二、（满分 20 分） 设 Ω 是以 $(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,3,4)$ 为顶点且体积为 V(>0)的四面体，

求积分 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

三、（满分 20 分） 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的收敛性，其中 $p>0$.

四、（满分 20 分） 设函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在第一象限连续可导且满足

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial}$，其中 u 只是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的函数，求 u, v.

五、（满分 20 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}[\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - n\int_0^1 f(x)dx] = \frac{1}{2}(f(1)-f(0))$.