

# 2019 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

## 工科类

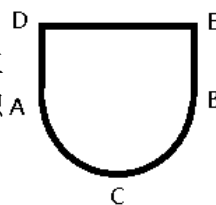
### 一、 计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ .

2. 求不定积分  $\int \frac{2x + \sin 2x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$ .

3. 求定积分  $\int_0^\pi \cos(\sin^2 x) \cos x dx$ .

4. 如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积 A 之和为 1，求铁丝长度的最小值。



5. 定义在  $[-1, 1]$  上的函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ , 讨论  $f(x)$  间断点, 并判断其

类型。

### 二、（满分 20 分）求积分 $\iint_D (5y^3 + x^2 + y^2 - 2x + y + 1) dx dy$ ,

$$D: 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \text{ 且 } x^2 + y^2 \leq 1.$$

### 三、（满分 20 分）讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ 的收敛性, 其中 $p > 0$ .

### 四、（满分 20 分）设由方程 $x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)$ (\*) 确定函数 $z = z(x, y)$ ,

1) 计算  $(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z-x) \frac{\partial z}{\partial y}$ ,

2) 如果以  $\vec{n} = (a, b, c)$  为法向量的平面与 (\*) 交为圆, 求此法向量。

### 五、（满分 20 分）设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导函数,

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{1}{2} (f(1) - f(0)).$