2018 经管类参考答案

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求不定分$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$。

解：$\frac{1}{(2+\cos x)\sin x} = \frac{2-\cos x}{3\sin x} - \frac{\sin x}{3(2+\cos x)} = \frac{2}{3\sin x} - \frac{\cos x}{3\sin x} - \frac{\sin x}{3(2+\cos x)}$

所以 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = (\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \left|\ln\sin x\right| + \ln|2+\cos x|$

2．求积分$\int_{-1}^{1} \frac{(x-\cos x)^2 \cos x}{x^2+\cos^2 x} dx$。

解：$\int_{-1}^{1} \frac{(x-\cos x)^2 \cos x}{x^2+\cos^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-2x\cos x+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x} dx = \int_{-1}^{1} \cos x dx$

$-2\int_{-1}^{1} \frac{x\cos^2 x}{x^2+\cos^2 x} dx = 2\sin 1$。

3．设$y=y(x)$是由方程$y+\ln y+x^2=1$确定的隐函数，求$y''(0)$。

解：$x=0$时$y=1$，对方程求导得 $y'+y'/y+2x=0$，得$y'(0)=0$

再求导 $y''+y''/y-(y')^2/y^2+2=0$，所以$y''(0)=-1$。

4．求广义积分$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$。

解：方法一：注意到 $1+x^6=(1+x^2)(1-x^2+x^4)$

且$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} = \int_{+\infty}^{0} \frac{t^6}{1+t^6}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^4 dt}{1+t^6}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2+x^4+x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$$

方法二： $\frac{1}{1+x^6}=\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}-\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{x-2\sqrt{3}/3}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{x+2\sqrt{3}/3}{x^2+\sqrt{3}x+1}$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{0}^{+\infty}(\frac{x+2\sqrt{3}/3}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{x-2\sqrt{3}/3}{x^2-\sqrt{3}x+1})dx$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{0}^{+\infty}(\frac{x+\sqrt{3}/2}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{x-\sqrt{3}/2}{x^2-\sqrt{3}x+1})dx$$

$$+\frac{1}{12}\int_{0}^{+\infty}(\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1})dx$$

$$=\frac{\pi}{6}+0+\frac{1}{12}\int_{0}^{+\infty}(\frac{1}{(x+\sqrt{3}/2)^2+1/4}+\frac{1}{(x-\sqrt{3}/2)^2+1/4})dx$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\arctan(2x+\sqrt{3})\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{6}\arctan(2x-\sqrt{3})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}$$

5．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]tdt}{x^4}$。

解：$\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]tdt=\int_0^x(e^{t^2}-1)(x-t)dt$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]tdt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{12x^2}=\frac{1}{12}$。

二、（满分 20 分）设 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n,\ (n\geq 1)$，求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛域并求其和函数。

解：a_n 满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-4a_n$， $a_{n+2}-2a_{n+1}=2^n(a_2-2a_1)=2^n$，即

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+2^n\ a_{n+2}=2^2a_n+2\times 2^n=2^3a_{n-1}+3\times 2^n=\cdots=2^n a_2+n\times 2^n$$

所以 $a_n=(n+1)2^{n-2}\ (n\geq 2)$

级数 $f(x)=x+\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)2^{n-2}x^n$ 的收敛域为 $(-1/2,1/2)$

$$\int_0^x (f(x)-x)dx=\sum_{n=2}^{+\infty}2^{n-2}x^{n+1}=\frac{x^3}{1-2x}，\quad 所以\ f(x)=x+\frac{3x^2-4x^3}{(1-2x)^2}。$$

三、**（满分 20 分）**求区域 $x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的体积。

解：$x^2+y^2=z$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 在 $z=1$ 处相交，用平面 $z=z_0$ 截区域的截面为圆。

当 $0\leq z_0\leq 1$ 时，截面积为 πz_0，当 $1\leq z_0\leq\sqrt{2}$ 时，截面积为 $\pi(2-z_0^2)$，

所以 $V=\pi\int_0^1 zdz+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)dz=\pi(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})$。

四、（满分 20 分） 设$l(k)$为直线$y=k(x-1)+\frac{5}{4}$含在区域$y\geq x^2$内直线段的长度，求$l(k)$的表达式及其最小值。

解：$y=k(x-1)+5/4$与$y=x^2$的两交点为(x_j,x_j^2),其中 $x_j=(k\pm\sqrt{k^2-4k+5})/2$

所以 $l(k)=\sqrt{k^2-4k+5+k^2(k^2-4k+5)}$　　记 $f=(k^2-4k+5)(k^2+1)$

$f'=4(k^3-3k^2+3k-1)=0$ 得 $k=1$　　所以　$\min l(k)=2$

五、（满分 20 分） 已知$a_n>0,\ a_1<1,\ (n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n,\ n=1,2,3,\cdots$，

证明：1）$a_n<1$ ；　　2）$a_n<a_{n+1}$。

证明：1) 由$a_1<1$, 可得$2a_2^2=a_1^2+a_1<2\Rightarrow a_2<1$，设$a_n<1$　可推得

$(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n<n+1\Rightarrow a_{n+1}<1$，所以$a_n<1$，$n=1,2,3,\cdots$

2) 又$(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n>na_n^2+a_n^2\Rightarrow a_{n+1}^2>a_n^2\Rightarrow a_{n+1}>a_n$。