2018 文专类参考答案

一计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求积分 $\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$ 。

解：$\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2-2x\cos x+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\cos xdx$

$-2\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^2 x}{x^2+\cos^2 x}dx=2\sin 1$。

2．求不定积分 $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$ 。

解：$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}=\int\frac{d\tan x}{\sqrt{1+\tan x}}=2\sqrt{1+\tan x}+c$

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{-t^2}-1)\sin tdt}{x^2\sin^2 x}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{-t^2}-1)\sin tdt}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{-t^2}-1)\sin tdt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{-x^2}-1)\sin x}{4x^3}=-\frac{1}{4}$ 。

4．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y+\ln y+x^2=1$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$ 。

解：$x=0$ 时 $y=1$，对方程求导得 $y'+y'/y+2x=0$，得 $y'(0)=0$

再求导 $y''+y''/y-(y')^2/y^2+2=0$，所以 $y''(0)=-1$ 。

5．求广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}$ 。

解：方法一：注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}=\int_{+\infty}^{0}\frac{t^4}{1+t^2+t^4}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^2+x^4}$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-x+x^2+x}{1+x^2+x^4}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x \quad =\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1/2+x)^2+3/4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

方法二：$\dfrac{1}{1+x^2+x^4}=\dfrac{1}{2}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{x+1/2}{x^2+x+1}-\frac{x-1/2}{x^2-x+1})dx+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1})dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}+\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4})dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

二、（满分 20 分）已知直角三角形ΔABC满足：$\angle C=90^0$且$AB+BC=1$，求三角形ΔABC面积的最大值。

解：设$BC=x$，则$AB=1-x$，$AC=\sqrt{1-2x}$，所以$S_{\Delta ABC}=x\sqrt{1-2x}/2$

求$S_{\Delta ABC}$的最大值点即为求$f(x)=x^2(1-2x)$的最大值点。

$f'=2x(1-2x)-2x^2=0$，得$x=0$(舍)$,x=1/3$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{6}\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$。

三、**（满分 20 分）**请问，当k在什么范围内取值，方程$1+kx=1/x^2$ 有且只有一个正根。

解：记$f(x)=1+kx-1/x^2$，$f'(x)=k+2/x^3$，当$k\geq 0$时，在$(0,+\infty)$ $f'(x)>0$

$f(x)$单调增，且$f(0^+)=-\infty$，$f(1)\geq 0$，所以当$k\geq 0$时，有且只有一个正根。

当$k<0$时，在$(0,+\infty)$ $f'(x)$单调减，$k+2/x^3=0$有唯一的根$x_0=\sqrt[3]{-k/2}$，

x_0是f的极大值点，且$f(0^+)=f(+\infty)=-\infty$，所以$f(x_0)=0$时有唯一正根，

$f(x_0)<0$时没有正根， $f(x_0)>0$时有二个正根。 $f(x_0)=0 \Rightarrow k=-2\sqrt{3}/9$。

所以当$k\ge 0$或$\Rightarrow k=-2\sqrt{3}/9$时有且只有一个正根。

四、（满分 20） 求区域$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$ 的体积。

解：$x^2+y^2=z$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 在 $z=1$处相交，用平面 $z=z_0$ 截区域的截面为圆。

当$0\le z_0 \le 1$时，截面积为πz_0，当$1\le z_0 \le \sqrt{2}$时，截面积为$\pi(2-z_0^2)$，

所以 $V=\pi\int_0^1 zdz+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)dz=\pi(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{6})$。

五、（满分 20 分） 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有非负二阶导数，证明：
$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=\max\{f(0), f(1)\}$

证明：因为 $f''(x)\ge 0$，所以 $f'(x)$单调增加，

1）若 $f'(0)>0 \Rightarrow f'(x)>0$，函数单调增加，$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=f(1)$

2）若 $f'(0)<0$ 且 $f'(1)<0 \Rightarrow f'(x)<0$， f 单调减少，$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=f(0)$

3）若 $f'(0)<0$ 且 $f'(1)>0$，存在唯一的x_0， $f'(x_0)=0$

在$[0,x_0]$, f 单调减少，在$[x_0,1]$, f 单调增加，所以$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=\max\{f(0), f(1)\}$。