2018（数学类）参考答案

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求积分$\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$。

解：$\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2-2x\cos x+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\cos xdx$

$-2\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^2 x}{x^2+\cos^2 x}dx=2\sin 1$。

2．设$z=z(x,y)$是由方程$z^5-xz^4+yz^3=1$确定的隐函数，求$z''_{xy}(0,0)$。

解：$x=y=0$时$z=1$，对x求导得

$5z^4z'_x-4xz^3z'_x+3yz^2z'_x=z^4$，　从而$z'_x(0,0)=1/5$，同理可得$z'_y(0,0)=-1/5$

当$x=0$时，再对y求导得

$20z^3z'_xz'_y+5z^4z''_{xy}+3z^2z'_x+6yzz'_xz'_y+3yz^2z''_{xy}=4z^3z'_y$

所以　$z''_{xy}(\ 0\ ,\ =0-)$

3．求曲线$L:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$在点$(1,-1,1)$处的单位切向量。

解：曲面$x^2+y^2-z^2=1$在点$(1,-1,1)$处的法向量为$n_1=i-j-k$

$x+y+z=1$在点$(1,-1,1)$处的法向量为$n_2=i+j+k$

曲线在$(1,-1,1)$处的切向量为$T=n_1\times n_2=-2j+2k$，单位切向量$T^0=\pm(-j+k)/\sqrt{2}$。

4．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]\sin tdt}{x^4}$。

解：$\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]\sin tdt=\int_0^x[e^{t^2}-1]\sin\left(x-t\right)dt$　　所以　由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[e^{(x-t)^2}-1]\sin t dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)\cos(x-t)dt}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x-\xi)\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{12x^2}=\frac{1}{12}$$ 。（其中 ξ 在 0 与 x 之间）

5．求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域并求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$ 的和。

解：记 $s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{2n}x^{2n}$

奇数次的级数的收敛半径为1，收敛域为 $(-1,1)$，偶数次的级数的收敛半径为 $1/3$，

收敛域为 $(-1/3,1/3)$，所以原级数的收敛域为 $(-1/3,1/3)$。

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}3^{2n}x^{2n}=\frac{x}{1-x^2}+\frac{9x^2}{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow s(x)=-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|-x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3x}{1-3x}\right|,\quad |x|<1/3$$

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}=s(1/6)=\frac{1}{2}\ln\frac{36}{35}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 3$。

二、（满分 20）已知曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的线密度 $\rho=(x+y)^2$，求 L 的质量。

解：质量 $m=\int_L\rho dl=\int_L(x^2+2xy+y^2)dl$，由对称性知

$$\int_L x^2 dl=\int_L y^2 dl=\int_L z^2 dl=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)dl=\frac{1}{3}\int_L dl=\frac{2\pi}{3}$$

$$\int_L 2xydl=\int_L 2yzdl=\int_L 2zxdl=\frac{1}{3}\int_L(2xy+2yz+2zx)dl$$

$$=\frac{1}{3}\int_L[(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2]dl=-\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)dl=-\frac{2\pi}{3}$$

$$m=\int_L(x^2+2xy+y^2)dl=\frac{2\pi}{3}$$ 。

三、（满分 20 分）设 $S(a)$ 为物体 $x^2+y^2\le z$ 被平面 $2x-2a(y-3)+z-13=0$ 所

截的截面面积，求 $S(a)$ 的表达式及其最小值。

解：截面在 xy 平面的投影为 $x^2+y^2+2x-2a(y-3)\le 13$，

即 $(x+1)^2+(y-a)^2\le (a-3)^2+5$　而平面法向为 $2i-2aj+k$

所以 $S(a)=\pi(a^2-6a+14)\sqrt{5+4a^2}$。

令 $S'(a)=0 \iff (2a-6a)(5+4a^2)+4a(a^2-6a+14)=0$

$\iff 2a^3-8a^2+11a-5=0$,解得 $a=1$

所以 $\min S(a)=27\pi$

四、（满分 20 分） 设 $\alpha\in R,$ 确定 α 的范围使 $f(x)=x^\alpha\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续。

解：当 $\alpha<-1$ 时，$f(0^+)=+\infty$，$f(x)$ 不一致连续。

当 $\alpha>0$ 时，$\forall\ \delta\ne 0\ \left|f(k\pi)-f(k\pi+\delta)\right|=(k\pi+\delta)^\alpha\left|\sin\delta\right|\xrightarrow{k\to\infty}\infty$，

$f(x)$ 不一致连续。

当 $-1\le\alpha\le 0$ 时，$f(0^+)=0$ 或 1，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 一致连续。

当 $x\ge 1$ 时，$\left|f'(x)\right|\le 1+\left|\alpha\right|\le 2$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续。

所以当 $-1\le\alpha\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续。

五、（满分 20 分） 已知 $a_n>0,\ a_1<1,\ (n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n,\ n=1,2,3,\cdots$，

1）证明：$\{a_n\}$ 收敛；2）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$。

证明：1) 由 $a_1<1,$ 可得 $2a_2^2=a_1^2+a_1<2\Rightarrow a_2<1$，由 $a_n<1$ 可推得

$(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n<n+1\Rightarrow a_{n+1}<1$，所以 $a_n<1$，$n=1,2,3,\cdots$

又 $(n+1)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n>na_n^2+a_n^2\Rightarrow a_{n+1}>a_n$，即 a_n 单调递增有上界。

所以 $\{a_n\}$ 收敛。

2) a_n 满足 $\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{k+1}^2=\sum_{k=1}^{n}ka_k^2+\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\Rightarrow(n+1)a_{n+1}^2=a_1^2+S_n$,

$\Rightarrow a_{n+1}^2=\dfrac{a_1^2}{n+1}+\dfrac{S_n}{n+1}$, 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n+1}=a$，从而得 $a^2=a$

因为 $a_n>0$ 且单调增，所以 $a\neq 0$， $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$。