2018(工科类)参考答案

一计算题：（每小题１４分，满分７０分）

1．求不定分$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$。

解：$\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}=\frac{2-\cos x}{3\sin x}-\frac{\sin x}{3(2+\cos x)}=\frac{2}{3\sin x}-\frac{\cos x}{3\sin x}-\frac{\sin x}{3(2+\cos x)}$

所以 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\ln|\sin x|+\ln|2+\cos x|$

2、求积分．$\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$。

解：$\int_{-1}^{1}\frac{(x-\cos x)^2\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x^2-2x\cos x+\cos^2 x)\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int_{-1}^{1}\cos xdx$

$$-2\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^2 x}{x^2+\cos^2 x}dx=2\sin 1$$

３、设$z=z(x,y)$是由方程$z^5-xz^4+yz^3=1$确定的隐函数，求$z''_{xy}(0,0)$。

解：$x=y=0$时$z=1$，对x求导得

$5z^4z'_x-4xz^3z'_x+3yz^2z'_x=z^4$，　从而$z'_x(0,0)=1/5$，同理可得$z'_y(0,0)=-1/5$

当$x=0$时，再对y求导得

$$20z^3z'_xz'_y+5z^4z''_{xy}+3z^2z'_x+6yzz'_xz'_y+3yz^2z''_{xy}=4z^3z'_y$$

所以　$z''_{xy}(0,0)=-$

４、计算$\iint_D (x^2+y^2)dxdy$。D为由不等式$\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$所确定的区域。

解：由条件　$0\le x\le 2$　　所以　$\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy$

$$=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr=4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\frac{3\pi}{4}$$ 。

5、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x [e^{(x-t)^2}-1]tdt}{x^4}$。

解：$\int_0^x [e^{(x-t)^2}-1]tdt=\int_0^x (e^{t^2}-1)(x-t)dt$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x [e^{(x-t)^2}-1]tdt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{12x^2}=\dfrac{1}{12}$ 。

二、（满分 20 分）求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$的收敛域并求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}$的和。

解：记$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^{2n}}{2n}x^{2n}$

奇数次的级数的收敛半径为1，收敛域为$(-1,1)$，偶数次的级数的收敛半径为$1/3$，收敛域为$(-1/3,1/3)$，所以原级数的收敛域为$(-1/3,1/3)$。

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}3^{2n}x^{2n}=\frac{x}{1-x^2}+\frac{9x^2}{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow s(x)=-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|-x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+3x}{1-3x}\right|,\quad |x|<1/3$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n6^n}=s(1/6)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{36}{35}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\ln 3$

三、（满分 20 分）分析函数$f(x,y)=(x^2+y^2-6y+10)e^y$的极值问题。

解：求可能极值点 令 $f_x'=2xe^y=0$ ， $f_y'=(x^2+y^2-4y+4)e^y=0$

解得 $x=0,y=2$ 再可求得二阶偏导数 $A=f_{xx}''=2$，$B=f_{xy}''=0$，$C=f_{yy}''=0$

$B^2-AC=0$，二阶偏导数极值判断法失效。

记$g(y)=f(0,y)=(y^2-6y+10)e^y$ $g'(2)=g''(2)=0$，$g'''(2)=2e^2>0$

所以 $y=2$不是$g(y)$的极值点，从而$(0,2)$不是f的极值点，所以f没有极值。

四、（满分 20 分） 已知质线 L：$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 的线密度 $\rho = \left| x^2 + x - y^2 - y \right|$，求 L 的质量。

解：L 的参数表达式为 $x = (\sqrt{6}\cos\theta - 1)/2$，$y = (\sqrt{6}\sin\theta - 1)/2$

$$z = (4 - \sqrt{6}\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta)/2 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

质量 $m = \int_L \rho dl = \dfrac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left|\cos 2\theta\right| \sqrt{3 - 3\sin 2\theta / 2} d\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \int_0^{4\pi} \left|\cos\theta\right| \sqrt{2 - \sin\theta} d\theta$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left|\cos\theta\right| \sqrt{2 - \sin\theta} d\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sqrt{2 - \sin\theta} d\theta$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta \sqrt{2 - \sin\theta} d\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (2 - \sin\theta)^{1.5} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (2 - \sin\theta)^{1.5} \Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$= \sqrt{6}(3\sqrt{3} - 1)$。

五、（满分 20 分） 已知 $a_n > 0,\ a_1 < 1,\ (n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$，证明：$\{a_n\}$ 收敛。

证明：由 $a_1 < 1$, 可得 $2a_2^2 = a_1^2 + a_1 < 2 \Rightarrow a_2 < 1$，由 $a_n < 1$ 可推得

$(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n < n + 1 \Rightarrow a_{n+1} < 1$，所以 $a_n < 1$，$n = 1, 2, 3, \cdots$

又 $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n > na_n^2 + a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$，即 a_n 单调递增有上界。

所以 $\{a_n\}$ 收敛。