

# 2018 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

## （经管类）

### 一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求不定积分  $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$ .

2. 求定积分  $\int_{-1}^1 \frac{(x - \cos x)^2 \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$ .

3. 设  $y = y(x)$  是由方程  $y + \ln y + x^2 = 1$  确定的隐函数，求  $y''(0)$ .

4. 求广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$ .

5. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [e^{(x-t)^2} - 1] t dt}{x^4}$ .

### 二、（满分 20 分）

设  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ , ( $n \geq 1$ ),

求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛域并求其和函数。

### 三、（满分 20 分）

求区域  $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  的体积。

### 四、（满分 20 分）

设  $l(k)$  为平面直线  $y = k(x - 1) + \frac{5}{4}$  含在平面区域  $y \geq x^2$  内

直线段的长度，求  $l(k)$  的表达式及其最小值。

### 五、（满分 20 分）

已知  $a_n > 0$ ,  $a_1 < 1$ ,  $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

证明：(1)  $a_n < 1$  ; (2)  $a_n < a_{n+1}$ .