

2018 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

（文专类）

一、计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{(x - \cos x)^2 \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$.

2. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - 1) \sin t dt}{x^2 \sin^2 x}$.

4. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y + \ln y + x^2 = 1$ 确定的隐函数，求 $y''(0)$ 。

5. 求广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + x^4}$.

二、（满分 20 分）已知直角三角形 $\triangle ABC$ 满足： $\angle C = 90^\circ$ 且 $AB + BC = 1$ ，
求三角形 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

三、（满分 20 分）试问：当 k 在什么范围内取值时，方程 $1 + kx = \frac{1}{x^2}$
有且只有一个正根。

四、（满分 20）求区域 $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 的体积。

五、（满分 20 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有非负二阶导数，证明：

$$\max_{x \in [0,1]} f(x) = \max \{f(0), f(1)\}.$$